

I. TIPOS DE MATRICES

1. Identifique las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix} \quad (5 \ 7 \ 8) \quad \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 8 & \frac{1}{3} & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 5 & 2 & 0 & -2 \\ -1 & 7 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 9 & 27 & 47 \\ 2 & -6 & -8 \\ 0 & 8 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 9 & 1 \\ 8 & -6 & 7 & 5 \\ 0 & -8 & 7 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Clasifique las siguientes matrices cuadradas:

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 11 & 26 & 0 \\ 26 & -3 & 9 \\ 0 & 9 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 18 & -4 \\ -18 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 5 & 6 & 0 \\ 8 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -6 & 0 & -4 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

II. SUMA DE MATRICES

1. Resuelva las siguientes operaciones:

a) $\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 10 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 19 & 9 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} =$

b) $\begin{pmatrix} 20 & 45 \\ 68 & -78 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -44 & -27 \\ 65 & 21 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -63 & 78 \\ 32 & 20 \end{pmatrix} =$

c) $\begin{pmatrix} -6 & 75 & 9 \\ -2 & -8 & 0 \\ 54 & 27 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 64 & 10 & 36 \\ -21 & -54 & 75 \\ -45 & 76 & 98 \end{pmatrix} =$

d) $\begin{pmatrix} 57 & 32 & 34 \\ 21 & 53 & 59 \\ -19 & 10 & -44 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 23 & 23 & -55 \\ 17 & -29 & -19 \\ 10 & -11 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 38 & 9 \\ -26 & 16 & -53 \\ -17 & 46 & -32 \end{pmatrix} =$

e) Sean:

$$A = \begin{pmatrix} -32 & 2 & -54 \\ -20 & -47 & 47 \\ 33 & 10 & 38 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 60 & 7 & 48 \\ -34 & -23 & 26 \\ -8 & 51 & 12 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 7 & -25 & 1 \\ -41 & -22 & -17 \\ 56 & 33 & 18 \end{pmatrix}$$

$$A + B =$$

$$B + C =$$

$$A + C =$$

$$A + B + C =$$

III. PRODUCTO DE MATRICES

1. Resuelva las siguientes operaciones:

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times (3 \ 5)$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 6 \\ 3 & -3 & 7 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 64 & 48 \\ -29 & 45 \\ 71 & 58 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 56 & -65 & -7 \\ 61 & 12 & 25 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 8 & -22 & -65 \\ 20 & -12 & 19 \\ 72 & 88 & 55 \end{pmatrix}$

IV. INVERSA DE LA MATRIZ, TRASPUESTA DE LA MATRIZ, DETERMINANTE DE LA MATRIZ

1. Calcule la matriz inversa de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 1 \end{pmatrix}$

2. Encuentre la traspuesta de las siguientes matrices

a) $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 8 \\ 7 & 1 & 0 \\ -4 & -7 & -6 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -5 & 4 & 9 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -7 & 8 & 9 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} -11 & -5 & 0 \\ 7 & 0 & 1 \\ -4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

3. Encuentre la determinante de las siguientes matrices

a) $\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

V. TRANSFORMACIONES (TRASLACIÓN, ROTACIÓN)

1. Resuelva los siguientes problemas:

a) Sea el sistema UVW trasladado con respecto al sistema fijo XYZ

$$P_0 = 1i_x + 2j_y + 3k_z$$

El punto en el sistema UVW es:

$$P_{UVW} = 5i_u + 6j_v + 7k_w$$

El punto con respecto al sistema fijo es:

$$P_{XYZ} = T(P_0) P_{UVW}$$

Encuentre la matriz de traslación.

b) Sea el sistema ABC trasladado con respecto al sistema fijo XYZ

$$P_0 = 4i_x + 8j_y + 1k_z$$

El punto en el sistema UVW es:

$$P_{ABC} = 6i_u + 2j_v$$

El punto con respecto al sistema fijo es:

$$P_{XYZ} = T(P_0) P_{ABC}$$

Encuentre la matriz de traslación.

c) Considere el sistema coordenado $x_1y_1z_1$, el cual se forma al rotar 45° alrededor del eje **Z**. El punto **P** ubicado en el sistema $x_1y_1z_1$ tiene las siguientes coordenadas:

$$P_1 = \begin{pmatrix} x^1 \\ y^1 \\ z^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{8} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Encuentre las coordenadas en el sistema $x_0y_0z_0$

d) Considere el sistema coordenado $x_1y_1z_1$, el cual se forma al rotar 60° alrededor del eje **Y**. El punto **P** ubicado en el sistema $x_1y_1z_1$ tiene las siguientes coordenadas:

$$P_1 = \begin{pmatrix} x^1 \\ y^1 \\ z^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Encuentre las coordenadas en el sistema $x_0y_0z_0$

VI. TRANSFORMACIONES (ESCALAMIENTO)

1. Transforme los siguientes puntos P, aplicando el factor de escala S indicado. Grafique los puntos resultantes.
 - a) $P1(-5, -2, 4)$, $P2(5, -4, 4)$, $P3(5, 6, -3)$ y $P4(-5, 6, -3)$.
 - i. $S(3, 2, 1)$.
 - ii. $S(0.2, 3, 1)$.
 - iii. $S(-3, 3, -1)$.

 - b) $P1(-4, -3, 4)$, $P2(4, -3, 4)$, $P3(4, -3, -4)$, $P4(-4, -3, -4)$ y $P5(0, 5, 0)$.
 - i. $S(-5, 1, 1)$.
 - ii. $S(-0.5, 8, 2)$.
 - iii. $S(5, 3, -10)$.

 - c) $P1(3, -4, 2)$, $P2(2, 6, 1)$, $P3(-1, 3, 5)$ y $P4(1, 1, 9)$.
 - i. $S(5, 2, 1)$.
 - ii. $S(1, -1, -1)$.

 - d) $P1(-4, 0, 2)$, $P2(2, 0, 2)$, $P3(2, 6, 2)$, $P4(-4, 6, 2)$, $P5(2, 0, -4)$, $P6(-4, 0, -4)$, $P7(-4, 6, -4)$ y $P8(2, 6, -4)$.
 - i. $S(4, -4, 1)$.
 - ii. $S(0, 4, -1)$.

Tip: Puede ayudarse usando la aplicación GeoGebra 3d para graficar.

VII. INTEGRACIÓN DE MÚLTIPLES TRANSFORMACIONES

1. Transforme los puntos P tomando en cuenta las operaciones indicadas. Grafique los puntos resultantes.

a) $[T][Rx][T^{-1}] : T(5, -6, -5), Rx(85^\circ).$

Puntos:

$$P1(-8, 0, 0),$$

$$P2(-4, 0, 5),$$

$$P3(-4, 0, -3),$$

$$P4(-6, 8, 0).$$

b) $[Rz][T] : T(12, 20, -1), Rz(120^\circ).$

Puntos:

$$P1(23, 0, 15),$$

$$P2(27, 0, 15),$$

$$P3(27, 10, 15),$$

$$P4(23, 10, 15),$$

$$P5(25, 5, 0).$$

c) $[S][Ry][Rz][T] : T(10, -3, 1), Rz(35^\circ), Ry(60^\circ), S(2, 3, -1).$

Puntos:

$$P1(-4, 0, 2), \quad P5(2, 0, -4),$$

$$P2(2, 0, 2), \quad P6(-4, 0, -4),$$

$$P3(2, 6, 2), \quad P7(-4, 6, -4),$$

$$P4(-4, 6, 2) \quad P8(2, 6, -4).$$

Tip: Puede ayudarse usando la aplicación GeoGebra 3d para graficar.

VIII. ROTACIÓN SOBRE UN VECTOR

1. Girar 70° sobre el vector: $V1(0, 10, 0)$ y $V2(5, 5, 5)$. Obtener la matriz resultante.
2. Girar 36° sobre el vector: $V1(10, 10, 0)$ y $V2(0, 25, -8)$. Obtener la matriz resultante.
3. Girar 15° sobre el vector: $V1(7, 0, -3)$ y $V2(1, -6, 0)$. Obtener la matriz resultante.
4. Girar 225° sobre el vector: $V1(13, -1, 4)$ y $V2(240, -45, -170)$. Obtener la matriz resultante.

IX. QUATERNIONES

1. Girar los siguientes puntos a 90° sobre el vector $V(10, 10, -5)$.

Puntos:

$$P1(6, 6, -5),$$

$$P2(3, 6, -2),$$

$$P3(5, 3, 0).$$

2. Girar los siguientes puntos a 75° sobre el vector: $V1(3, 3, 3)$, $V2(3, 9, 4)$.

Puntos:

$$P1(5, 7, 2),$$

$$P2(1, 8, 1),$$

$$P3(3, 6, 5),$$

$$P4(3, 9, 4).$$

Tip: Puede ayudarse usando la aplicación GeoGebra 3d para graficar.

X. PERSPECTIVA

1. Se tienen los siguientes vértices de un cubo:

$$P1(-4, -8, 3), P5(-4, -8, 7),$$

$$P2(6, -8, 3), \quad P6(6, -8, -7),$$

$$P3(6, 2, 3), \quad P7(6, 2, -7),$$

$$P4(-4, 2, 3), \quad P8(-4, 2, 7).$$

Grafique los puntos usando la perspectiva en $Z_{prp} = 18$.

2. Se tienen los siguientes vértices de un prisma rectangular:

$$P1(-8, -5, -2), \quad P5(-8, -5, -10),$$

$$P2(2, -5, -2), \quad P6(2, -5, -10),$$

$$P3(2, 10, -2), \quad P7(2, 10, -10),$$

$$P4(-8, 10, -2), \quad P8(-8, 10, 10).$$

Grafique los puntos usando la perspectiva en $Z_{prp} = 10$

3. Usando los puntos resultantes del ejercicio a) de la sección VII, gráfíquelos usando perspectiva en $Z_{prp} = 12$.
4. Usando los puntos resultantes del ejercicio c) de la sección VII, gráfíquelos usando perspectiva en $Z_{prp} = 30$.

XI. SUPERFICIES VISIBLES

1. En una partida de Minecraft se tiene un cubo cuyos vértices son:

$$\begin{array}{ll} P1(15, 7, -12), & P5(20, 7, -17), \\ P2(20, 7, -12), & P6(15, 7, -17), \\ P3(20, 12, -12), & P7(15, 12, -17), \\ P4(15, 12, -12), & P8(20, 12, -17). \end{array}$$

El jugador se encuentra en la posición

$$J(-5, -8, 12).$$

Encuentre las caras visibles del cubo.

2. El jugador se ha movido de lugar al punto $J(-10, 12, -1)$. Encuentre las caras visibles del mismo cubo del punto 1.

Tip: Puede ayudarse usando la aplicación GeoGebra 3d para graficar.

XII. ALGORITMO DE BERSENHAM PARA LÍNEAS

- I. Grafique del punto:
 $P1(1, 6)$, al punto $P5(10, 14)$

- II. Grafique del punto:
 $P1(1, 1)$, al punto $P5(9, 6)$

Tip: Puede ayudarse usando la aplicación GeoGebra 3d para graficar.

XIII. ALGORITMO DE BERSENHAM PARA CÍRCULOS

- I. Grafique la circunferencia:
Radio = 6

Tip: Puede ayudarse usando la aplicación GeoGebra 3d para graficar.

XIV. ALGORITMO DE BERSENHAM PARA ELIPSES

- II. Grafique la elipse:
Radio $y = 6$ y Radio $x = 8$

- III. Grafique la elipse:
 $rx = 5$ y $rx = 10y$

Tip: Puede ayudarse usando la aplicación GeoGebra 3d para graficar.

XV. ILUMINACIÓN

1. Defina que es la iluminación difusa y describa 2 ejemplos:

2. Defina que es la iluminación ambiental y de un ejemplo:

3. Defina que es la iluminación especular y de un ejemplo:

4. ¿Que son y que función tienen los mapas de normales en modelado 3d?

5. ¿Que son y para que se utilizan los mapas de relieves en modelado 3d?